# Kit de Survie
# Probabilité et Statistique
# Prépa ECS


*70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris*
*01 43 48 83 36*
*contact@edukaty.com*

**Avant Propos**

Chers élèves,

L'équipe pédagogique d'eDukaty, l'organisme de soutien scolaire pour classes préparatoires, est heureux de publier ce «Kit de survie» en Probabilités, destiné aux élèves en classe préparatoire voie ECS. Il contient les principaux résultats du cours de Probabilité et Statistique, sans leur démonstration. Les élèves des voies ECE pourront également s'y référer, bien que de nombreux résultats de ce formulaire ne sont pas dans leur programme. Il intéressera également les étudiants des classes préparatoires scientifiques.
Ce formulaire ne saurait bien sûr se substituer à un cours exhaustif, dont l'étude est primordiale pour la réussite aux concours. Néanmoins, il peut être un outil de travail précieux dans le cadre des révisions, et permet au lecteur d'avoir une vision synthétique du programme. Si vous avez des remarques ou des critiques sur ce livret, n'hésitez pas à nous envoyer un émail à l'adresse suivante : contact@edukaty.com.

Bonne chance à vous tous !

L'équipe pédagogique d'eDukaty




*70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris*
*01 43 48 83 36*
*contact@edukaty.com*

# Table des matières

## Formules combinatoires

❒ Soit $n$ un entier naturel,

▶ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

▶ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

▶ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

♢

▶ $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ avec $0 \leq p \leq n$.

▶ On pose $\displaystyle\binom{n}{p} = 0$ lorsque $p > n$.

■

▶ $\forall\ (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ p \leq n,\ \displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ (symétrie).

▶ $\forall\ (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ 1 \leq p\ \leq n,\ \displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.

▶ $\forall\ (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ 1 \leq p\ \leq n,\ \displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ (triangle de Pascal).

▶ $\forall\ (p,d) \in \mathbb{N}^2,\ p \leq d,\ \displaystyle\sum_{n=p}^{d} \binom{n}{p} = \binom{d+1}{p+1}$ (triangle de Pascal généralisée).

❒ **Formule du binôme de Newton :** $\forall\ (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ (a+b)^n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^k b^{n-k}$.

■

▶ $\forall\ (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ p \leq n,\ \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$.

▶ $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} = 2^{n-1} = \sum_{p=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2p+1}$.

▶ $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

❒ **Formule multinomiale** (hors programme) $\forall\ (a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^p$,

$$\sum_{\left\{\begin{array}{l}(n_1,\ldots,n_p) \in [0,n]^p \\ n_1 + \ldots + n_p = n\end{array}\right.} \underbrace{\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_p!}}_{\text{coeff. multinomial}} a_1^{n_1} \times \ldots \times a_p^{n_p} = (a_1 + \ldots + a_p)^n \text{ où } n \in \mathbb{N}.$$

❒ $\forall\ (n_1, n_2, n) \in \mathbb{N}^3,\ n \leq n_1 + n_2,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k} = \binom{n_1+n_2}{n}$.

■ $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.



www.edukaty.fr
*70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris*
*01 43 48 83 36*
*contact@edukaty.com*

❒ (hors programme) $\forall\ (N_1, \ldots, N_k) \in \mathbb{N}^p$,

$$\sum_{\begin{cases} (n_1, \ldots, n_k) \in [0, n]^k \\ n_1 + \ldots + n_k = n \end{cases}} \binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{n_2} \times \cdots \times \binom{N_k}{n_k} = \binom{N_1 + \cdots + N_k}{n}.$$

❒ $\forall\ (n, p) \in \mathbb{N}^2,\ p \leq n, \quad \displaystyle\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n} 1 = \binom{n}{p}$.

♢

► $\forall\ (n, p) \in \mathbb{N}^2,\ p \leq n,\ \forall\ (a_p, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^p,\ \displaystyle\prod_{k=p}^{n} a_k = a_p \times \cdots \times a_n$.

■ Soit $n$ un entier naturel,

► $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} k = n!$

► $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (2k) = 2^n n!$

► $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$

# Dénombrement

❒

► Soit $A$ et $B$ deux ensembles tels que $A$ est *fini* et $B \subset A$, alors $|B| \leq |A|$ et $|A - B| = |A| - |B|$.

► $(|A| = |B|) \Leftrightarrow (A = B)$.

► $|A \biguplus B| = |A| + |B|$, $\left|\biguplus_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |A_k|$.

► $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\prod_{k=1}^{n} A_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |A_k|$.

❒ **Poincaré :** $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \ldots A_{i_k}|$.

◇ **Partition d'un ensemble :** On dit que la famille d'événements $(A_i)_{i \in I}$ est une *partition* de $E$ : $\forall i \in I,\ A_i \neq \emptyset,\ (\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j) \Rightarrow (A_i \cap A_j = \emptyset)$ et $\biguplus_{i \in I} A_i = E$.

Remarque : c'est la même définition pour un SCE avec $E = \Omega$.
❒ **Lemme des berger :** Soit $E$ et $F$ *deux ensembles finis* et $f$ une application *surjective* de $E$ vers $F$. On suppose $\exists\ p \in \mathbb{N}^* \mid \forall\ y \in F,\ |f^{-1}(\{y\})| = p$, alors $|E| = p|F|$.
❒ **Nombre d'applications de $E$ vers $F$ :** $|\mathcal{A}(E,F)| = |F|^{|E|}$.
❒ **Nombre d'injections de $E_p$ vers $F_n$** avec $p \leq n$ : $A_n^p$.
❒ **Nombre de permutations de $E_n$** avec $n \in \mathbb{N}^*$ : $A_n^n = n!$
❒ **Nombre $p$-listes de $E_n$ :** $n^p$.
❒ **Nombre de combinaisons de $p$ éléments de $E_n$**, avec $1 \leq p \leq n$ : $\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!}$.
❒ **Nombre de parties d'un ensemble $E$ :** $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$.
❒ **Nombre de suites :**

► $|\{(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in (\mathbb{N}^*)^p \mid 1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_p \leq n\}| = \binom{n}{p}$.



www.edukaty.fr
*70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris*
*01 43 48 83 36*
*contact@edukaty.com*

## Espaces probabilisés

$\diamondsuit$ **Tribu :** Tout ensemble de parties d'un ensemble $\Omega$, *contenant* $\Omega$, *stable par réunion au plus dénombrable et par passage au complémentaire*, s'appelle une **tribu** ou $\sigma$-algèbre sur $\Omega$, souvent noté $\mathcal{A}$. Autrement dit : $\Omega \in \mathcal{A}$, $\forall A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} \in \mathcal{A}$, pour toute suite $(A_n)_{n\geq n_0}$ d'événements de $\mathcal{A}$, $\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

■ $\emptyset \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ est stable pour $\cap, -$.

❒

▶ $\sigma(A) = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$.

▶ Soit $(A_k)_{k\in K}$ un *SCE* alors $\sigma((A_k)_{k\in K}) = \left\{\biguplus_{l\in L} A_l \mid L \in \mathcal{P}(K)\right\}$.

▶ Si $\Omega$ au plus dénombrable $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

❒ **Tribu de Borel :** $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]-\infty, x[,\ x \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{[x, +\infty[,\ x \in \mathbb{R}\}) = \cdots$

$\diamondsuit$ **Axiomatique d'une probabilité :** Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, on appelle *probabilité* sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $\mathbf{P} : A \to [0,1]$ vérifiant :

$\mathbf{P}(\Omega) = 1$, $\forall\ (A_k)_{k\in K}$, deux à deux disjoints $\sum_k \mathbf{P}(A_k) < \infty$ et

$\mathbf{P}\left(\biguplus_{k\in K} A_k\right) = \sum_{k\in K} \mathbf{P}(A_k)$ ($\sigma$-*additivité* de $\mathbf{P}$).

$\diamondsuit$ On appelle **espace probabilisé** tout triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

❒ Soit $A$ et $B$ deux évt de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ :

▶ $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$.

▶ $\mathbf{P}(A \biguplus B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

▶ $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

▶ $\mathbf{P}(A - B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

▶ $(B \subset A) \Rightarrow (\mathbf{P}(A - B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B))$.

▶ $(B \subset A) \Rightarrow (\mathbf{P}(B) \leq \mathbf{P}(A))$ propriété de croissance de $\mathbf{P}$.

▶ $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

▶ $\mathbf{P}(\biguplus_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k)$.

❒ **Limite monotone :**

▶ $((A_n)_{n\geq 0} \nearrow) \Rightarrow \left(\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)\right)$.

▶ $((A_n)_{n\geq 0} \searrow) \Rightarrow \left(\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)\right)$.

☐ Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une *suite quelconque d'événements* :

$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$ et $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$.

❒ **Inégalité de Boole ou sous-additivité** (hors programme)

$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k)$ et $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$ (où $\sum_n \mathbf{P}(A_n) < \infty$ ou diverge).

❒ **Relation de Laplace** (cas d'équiprobabilité) $\forall\ A \in \mathcal{A}, \mathbf{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$.

$\diamondsuit$ **Indépendance d'événements :**

▶ **2 événements sont indépendants si et seulement si** : $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

▶ $n$ **événements sont 2 à 2 indépendants si et seulement si** :
$\forall (i,j) \in [1,n]^2,\ (i \neq j) \Rightarrow (\mathbf{P}(A_i \cap A_j) = \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j))$.


*70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris*
*01 43 48 83 36*
*contact@edukaty.com*

▶ $n$ **événements sont mutuellement indépendants si et seulement si** :
$\forall I \in \mathcal{P}([1,n]),\ I \neq \emptyset,\ \mathbf{P}(\bigcap\limits_{i\in I} A_i) = \prod\limits_{i\in I} \mathbf{P}(A_i)$.

▶ **Suites d'événements :** on se ramène au cas fini pour toutes sous-suites finies

■ Les assertions suivantes sont équivalentes :

▶ $A \perp\!\!\!\perp B$,

▶ $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$,

▶ $\overline{A} \perp\!\!\!\perp B$,

▶ $\overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}$.

■ Soit $(A_n)_n$ une suite d'*événements indépendants* alors $(B_n)_n$ où pour tout entier $n$, $B_n = A_n$ ou $\overline{A}_n$ *reste* une suite d'événements indépendants.

◇ **Probabilité conditionnelle** : $\forall A \in \mathcal{A} \mid \mathbf{P}(A) \neq 0, \mathbf{P}_A(B) = \dfrac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A)}$.

■ Toutes les propriétés vues sur les probas inconditionnelles sont encore valable.
❒ On dit que deux événements $A$ et $B$ où $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et $\mathbf{P}(B) \neq 0$, sont indépendants si l'une des conditions équivalentes est vérifiée :

▶ $\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

▶ $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$.

▶ $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A)$.

❒ **Formule des probabilités composées :** Soit $A_1, \ldots, A_n$, $n$ événements tels que pour tout $n \geq 2$, $\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors :
$\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\mathbf{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots \mathbf{P}_{A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n)$.
❒ **Formule des probabilités totales :** Soit $(A_k)_{k\in K}$ un *SCE* tel que $\forall k \in K$, $\mathbf{P}(A_k) \neq 0$, alors $\forall B \in \mathcal{A}$, $\sum\limits_k \mathbf{P}_{A_k}(B)\mathbf{P}(A_k) < \infty$ et $\mathbf{P}(B) = \sum\limits_{k\in K} \mathbf{P}_{A_k}(B)\mathbf{P}(A_k)$.
❒ **Bayes :** Soit $(A_k)_{k\in K}$ un *SCE* tel que $\forall k \in K$, $\mathbf{P}(A_k) \neq 0$, alors
$\forall B \in \mathcal{A} \mid \mathbf{P}(B) \neq 0 :\ \forall i \in K,\ \mathbf{P}_B(A_i) = \dfrac{\mathbf{P}_{A_i}(B)\mathbf{P}(A_i)}{\sum\limits_{k\in K} \mathbf{P}_{A_k}(B)\mathbf{P}(A_k)}$.

## Variables Aléatoires Réelles

♢ $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$.
♢ $X$ v.a.r.d. si $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.
♢ $X$ v.a.r.a.d. si $X(\Omega)$ est $\infty$ et indénombrable.
♢ $X = Y$ lorsque $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = Y(\omega)$.
♢ $X = Y$ p.s. lorsque $\mathbf{P}([X = Y]) = 1$.
♢ $\mathcal{A}_X = \sigma\left(([X = x])_{x \in X(\Omega)}\right) = \left\{ \biguplus_{x \in A} [X = x] \mid A \subset X(\Omega) \right\}$.
♢ **Loi de probabilité** $P_X : X(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$, définie par $\forall x \in X(\Omega),\ P_X(x) = \mathbf{P}([X = x])$.
❐ **Caractérisation d'une loi**

- ► On donne les probabilités ponctuelles ou bien la fonction de répartition.
- ► On donne une densité de $X$ ou la fonction de répartition.

❐ $(X = Y) \Rightarrow (P_X = P_Y)$.
❐ $(P_X = P_Y) \Rightarrow (\forall k \geq 0, \mathbf{E}(X^k) = \mathbf{E}(Y^k))$.
❐ **Caractérisation d'une densité** (caractérisation) $(f$ densité$) \Leftrightarrow$ $(f \geq 0$ sur $\mathbb{R}, \mathcal{C}^0$ presque partout, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut 1).
♢ **Fonction de répartition** $F$

- ► $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \displaystyle\sum_{\begin{cases} x_i \in X(\Omega) \\ x_i \leq x \end{cases}} \mathbf{P}([X = x_i])$.
- ► $\forall x \in \mathbf{R},\ F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(u)du$.

❐ $F' = f$ là où $F$ est dérivable i.e. là où $f$ est continue.

■

- ► Dans le cas général $\lim\limits_{-\infty} F = 0,\ \lim\limits_{+\infty} F = 1,\ F\ \mathcal{C}^0$ à droite en tout point de $\mathbb{R}$, $F$ non décroissante.
- ► On ajoute $F : \mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} - I$ ($I$ ensemble fini éventuellement vide)

■

- ► $\forall a \in \mathbf{R},\ \mathbf{P}([X = a]) = F_X(a) - F_X(a^-)$.
- ► $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq b,\ \mathbf{P}([a \leq X \leq b]) = F_X(b) - F_X(a^-)$.
- ► $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq b,\ \mathbf{P}([a < X \leq b]) = F_X(b) - F_X(a)$.
- ► $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq b,\ \mathbf{P}([a \leq X < b]) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$.
- ► $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq b,\ \mathbf{P}([a < X < b]) = F_X(b^-) - F_X(a)$.

❐ $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq b,\ \mathbf{P}([a \leq X \leq b]) = \mathbf{P}([a < X \leq b]) = \mathbf{P}([a \leq X < b]) = \mathbf{P}([a < X < b]) = \displaystyle\int_a^b f_X(u)du$.

❐ $\forall B \subset X(\Omega),\ \mathbf{P}(B) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x_i \in X(\Omega)} \mathbf{P}([X = x_i]) \\ \displaystyle\int_{x \in B} f(x)dx. \end{cases}$

♢ $\mathbf{E}(X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \mathbf{P}([X = x_i]) & \text{sous reserve de convergence absolue} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx & \text{sous reserve de convergence.} \end{cases}$

❐

- ► $\forall X \in \mathcal{L}^1,\ (X \geq 0) \Rightarrow (\mathbf{E}(X) \geq 0)$.
- ► $\forall (X, Y) \in (\mathcal{L}^1)^2,\ (X \leq Y) \Rightarrow (\mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(Y))$.


70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris
01 43 48 83 36
contact@edukaty.com

- ► $\forall (X,Y) \in (\mathcal{L}^1)^2,\ (X = Y) \Rightarrow (\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y))$.
- ► $(\forall Y \in \mathcal{L}^1$ et $X$ tel que $|X| \leq Y) \Rightarrow (X \in \mathcal{L}^1$ et $\mathbf{E}(|X|) \leq \mathbf{E}(|Y|))$.
- ► $\forall X \in \mathcal{L}^1,\ |\mathbf{E}(X)| \leq \mathbf{E}(|X|)$.

◇ **Espérance conditionnelle** $\forall A \in \mathcal{A} \mid \mathbf{P}(A) \neq 0$ :
$\mathbf{E}(X|A) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \mathbf{P}_A([X = x_i])$ sous reserve de convergence absolue.

❒ **Formule de l'espérance totale** Soit $(A_i)_{i\in I}$ un $SCE$ tel que
$\forall i \in I,\ \mathbf{P}(A_i) \neq 0,\ \mathbf{E}(X) = \sum_{i\in I} \mathbf{E}(X|A_i)\mathbf{P}(A_i)$ sous reserve de convergence absolue.

❒ **Transfert**

$$\mathbf{E}(\varphi(X)) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x_i\in X(\Omega)} \varphi(x_i)\mathbf{P}([X = x_i]) \text{ sous reserve de convergence absolue où } \varphi \text{ déf sur } X(\Omega) \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)dx \text{ sous reserve de convergence absolue où } \varphi \text{ est } \mathcal{C}^0 \text{ presque partout.} \end{cases}$$

◇

► $$\mathbf{V}(X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x_i\in X(\Omega)} (x_i - \mathbf{E}(X))^2\mathbf{P}([X = x_i]) \text{ sous reserve de convergence absolue} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mathbf{E}(X))^2 f(x)dx \text{ sous reserve de convergence absolue} \end{cases}$$

► $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

❒ **Théorème de Huygens-koenig** $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2$.
❒ $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \mathbf{E}(aX + b) = a\mathbf{E}(X) + b$ et $\mathbf{V}(aX + b) = a^2\mathbf{V}(X)$
◇ **Moment d'ordre** $r \geq 0$

$$m_r(X) = \mathbf{E}(X^r) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x_i\in X(\Omega)} x_i^r\mathbf{P}([X = x_i]) \text{ sous réserve de convergence absolue}| \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx \text{ sous réserve de convergence.} \end{cases}$$

◇ **Moment centré d'ordre** $r \geq 0$

$$\mu_r(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^r) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x_i\in X(\Omega)} (x_i - \mathbf{E}(X))^r\mathbf{P}([X = x_i]) \text{ sous réserve de convergence} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mathbf{E}(X))^r f(x)dx \text{ sous réserve de convergence.} \end{cases}$$

◇ **Moment factoriel d'ordre** $r \geq 1$
$\mathbf{E}(X(X-1)\dots(X-r+1)) = \sum_{x_i\in X(\Omega)} x_i(x_i - 1)\dots(x_i - r + 1)\mathbf{P}([X = x_i])$ sous réserve de convergence absolue.
❒ Soit $r \in \mathbb{N}$ alors $(m_{r+1}(X) < \infty) \Rightarrow (\forall k \in [0,r], m_k(X)) < \infty)$.
❒ Soit $(\mu_{r+1}(X) < \infty) \Rightarrow (\forall k \in [0,r],\ \mu_k(X)) < \infty)$.
❒ $\forall r \in \mathbb{N},\ (m_r(X) < \infty) \Leftrightarrow (\mu_r(X) < \infty)$.

# Vecteur aléatoires

## Séries doubles

❒ **Fubini dans le cas positif (F$\oplus$)** Soit $u=(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille à deux indices de réels positifs indexée par $I\times J\subset\mathbb{N}^2$. Si $\forall i\in I,\ \sum_j u_{i,j}<+\infty$ puis $\sum_i\sum_{j\in J}u_{i,j}<+\infty$ **alors** $\sum_{(i,j)}u_{i,j}<+\infty$. On a alors les résultats suivants : $\forall j\in J,\ \sum_i u_{i,j}<+\infty$ puis $\sum_j\sum_{i\in I}u_{i,j}<+\infty$ et $\sum_{(i,j)\in I\times J}u_{i,j}=\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J}u_{i,j}\right)=\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I}u_{i,j}\right)$.

❒ **Comparaison pour les séries à termes positifs**

- Soit $I'\subset I$ et $J'\subset J$ et deux séries $\sum_{(i,j)}u_{i,j}$ et $\sum_{(i,j)}v_{i,j}$ tel que $\forall(i,j)\in I'\times J'$,

  $0\leq v_{i,j}\leq u_{i,j}$. Alors $(\sum_{(i,j)}u_{i,j}$ cv$)\Rightarrow(\sum_{(i,j)}v_{i,j}$ cv$)$.
- Par contraposée $(\sum_{(i,j)}v_{i,j}$ div$)\Rightarrow(\sum_{(i,j)}u_{i,j}$ div$)$.

❒ **Sommation par paquets (admis)** Soit $\sum_{i,j}|u_{i,j}|<+\infty$ où $(i,j)\in I\times J$, et $(A_k)_{k\in K}$ une partition de $I\times J$, alors on a : $\forall k\in K,\ \sum_{i,j}|u_{i,j}|<+\infty$ où $(i,j)\in A_k$ de somme $\sum_{(i,j)\in A_k}u_{i,j}$, et $\sum_k\left(\sum_{(i,j)\in A_k}|u_{i,j}|\right)<+\infty$.

Enfin on a $\sum_{k\in K}\left(\sum_{(i,j)\in A_k}u_{i,j}\right)=\sum_{(i,j)\in I\times J}u_{i,j}$.

## Couples discrets

◇ **Loi de probabilité d'un couple** Soit $C=(X,Y)$. $P_C:X(\Omega)\times Y(\Omega)\to[0,1]$, définie par $\forall\ (x_i,y_j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega),\ P_C(x_i,y_j)=\mathbf{P}([X=x_i]\cap[Y=y_i])=p_{i,j}$.

❒ ◇ **Lois marginales**

- $P_X:X(\Omega)\longrightarrow[0,1]$, définie par $\forall x_i\in X(\Omega),\ P_X(x_i)=\mathbf{P}([X=x_i])$ et
- $P_Y:Y(\Omega)\longrightarrow[0,1]$, définie par $\forall y_i\in Y(\Omega),\ P_Y(y_i)=\mathbf{P}([Y=y_i])$.

❒

- $\forall x_i\in X(\Omega),\ \mathbf{P}([X=x_i])=p_{i\bullet}=\sum_{y_j\in Y(\Omega)}p_{i,j}$ et
- $\forall y_j\in Y(\Omega),\ \mathbf{P}([Y=y_j])=p_{\bullet j}=\sum_{x_i\in X(\Omega)}p_{i,j}$.

◇ **Lois conditionnelles**

- $\mathbf{P}_{[X=x_i]}:Y(\Omega)\longrightarrow$ définie par $\forall y_j\in Y(\Omega),\ \mathbf{P}_{[X=x_i]}([Y=y_j])=\dfrac{p_{i,j}}{p_{i\bullet}}$ et
- $\mathbf{P}_{[Y=y_j]}:X(\Omega)\longrightarrow$ définie par $\forall x_i\in X(\Omega),\ \mathbf{P}_{[Y=y_j]}([Y=y_j])=\dfrac{p_{i,j}}{p_{\bullet j}}$


70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris
01 43 48 83 36
contact@edukaty.com

❒ **Caractérisation de la loi d'une fonction d'un couple** Notons $Z = g(X,Y)$.
*Caractériser* la loi de la variable $Z$, c'est donner $Z(\Omega) = g(X,Y)(\Omega)$ et pour tout $z$ de $Z(\Omega)$ :

$$\mathbf{P}([Z=z]) = \sum_{\begin{cases} (x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega) \\ g(x,y)=z \end{cases}} \mathbf{P}([X=x]\cap[Y=y]).$$

❒ $\forall I \in \mathcal{P}(Z(\Omega)) : \mathbf{P}([Z\in I]) = \displaystyle\sum_{\begin{cases} (x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega) \\ g(x,y)\in I \end{cases}} \mathbf{P}([X=x]\cap[Y=y])$.

❒ **Théorème de transfert** Soit $\varphi$ définie sur $\mathcal{D} \supset X(\Omega)\times Y(\Omega)$,
$\mathbf{E}(\varphi(X,Y)) = \displaystyle\sum_{(x_i,y_j)\in(X,Y)(\Omega)} \varphi(x_i,y_j)\,\mathbf{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j])$ sous réserve de convergence absolue de la série double en jeu.

❒ **Droite de régression de $Y$ en $X$** notée $\Delta$ a pour équation :
$\widehat{Y} = \left(\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathbf{V}(X)}\right)(X - \mathbf{E}(X)) + \mathbf{E}(Y)$ et en inversant les rôles symétriques de $X$ et $Y$ nous obtenons $\widehat{X} = \left(\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathbf{V}(Y)}\right)(Y - \mathbf{E}(Y)) + \mathbf{E}(X)$ qui est l'équation de la *droite de régression de* $X$ en $Y$ notée $\Delta'$.

## Vecteurs discrets

◇ **Loi d'un vecteur de dimension** $n \geq 2$ Soit $V = (X_1,\dots,X_n)$
$P_V : X_1(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega) \longrightarrow [0,1]$, définie par $\forall(x_1,\dots,x_n) \in \displaystyle\prod_{i=1}^n X_k(\Omega)$,

$P_V(x_1,\dots,x_n) = \mathbf{P}\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^n [X=x_i]\right)$.

◇ **Loi marginales de dimension un :** $\forall k \in [1,n], P_{X_k} : X_k(\Omega) \longrightarrow [0,1]$, définie par $\forall x_k \in X_k(\Omega),\ P_{X_k}(x_k) = \mathbf{P}([X_k = x_k])$.

❒ $\forall k \in [1,n],\ \forall x_k \in X_k(\Omega)$,

$$\mathbf{P}([X_k = x_k]) = \sum_{(x_1,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots,x_n)\in \prod_{m\in[1,n]-\{k\}} X_m(\Omega)} \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^n [X_j = x_j]\right).$$

❒ **Théorème de transfert** Soit $V = (X_1,\dots,X_n)$ alors
$\mathbf{E}(\varphi(X_1,\dots,X_n)) = \displaystyle\sum_{(x_1,\dots,x_n)\in X_1(\Omega)\times\dots\times X_n(\Omega)} \varphi(x_1,\dots,x_n)\mathbf{P}([X_1 = x_1]\cap\dots\cap[X_n = x_n])$ sous réserve de convergence absolue.

❒ **Caractérisation de la loi d'une fonction d'un vecteur** Soit $V = (X_1,\dots,X_n)$ et $\varphi$ une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^n$ contenant $\displaystyle\prod_{k=1}^n X_k(\Omega)$, alors la *loi* de $Z = \varphi(V)$ est *caractérisée* par la donnée de $Z(\Omega) \subset \mathrm{Im}(\varphi)$ et par celles de

$$\mathbf{P}([Z=z]) = \sum_{\begin{cases} (x_1,\dots,x_n) \in X_1(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega) \\ \varphi(x_1,\dots,x_n)=z \end{cases}} \mathbf{P}([X_1 = x_1]\cap\dots\cap[X_n = x_n])$$

pour tout $z$ de $Z(\Omega)$.


70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris
01 43 48 83 36
contact@edukaty.com

Covariance

$\diamondsuit$ Soit $X, Y \in \mathcal{L}^2$, $\text{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}((X-\mathbf{E}(X))(Y-\mathbf{E}(Y)))$.

■ Soit $X, Y \in \mathcal{L}^2$,

▶ $\text{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$ (théorème de Huygens).

▶ $\text{Cov}(X,X) = \mathbf{V}(X) \geq 0$ (positivité).

▶ $\text{Cov}(X,Y) = \text{Cov}(Y,X)$ (symétrie).

▶ Soit $X, Y, Z \in \mathcal{L}^2$, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\text{Cov}(aX + bY, Z) = a\ \text{Cov}(X,Z) + b\ \text{Cov}(Y,Z)$ (linéarité à gauche).

▶ $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, $\text{Cov}(aX+b, cY+d) = ac\ \text{Cov}(X,Y)$.

▶ $\forall k, \forall l, X_k$ et $Y_l \in \mathcal{L}_d^2, \lambda_d$ et $\mu_l \in \mathbb{R}$,

$$\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i, \sum_{j=1}^{m} \mu_j Y_j\right) = \sum_{(i,j)\in[1,n]\times[1,m]} \lambda_i \mu_j\ \text{Cov}(X_i, Y_j) \text{ (bilinéarité).}$$

❒ $\forall i \in [1,n], X_i \in \mathcal{L}^2$, $a_i \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathbf{V}(X_i) + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j\ \text{Cov}(X_i, X_j).$$

❒ **Identité de polarisation** Soit $X, Y \in \mathcal{L}_d^2$ alors :

▶ $\mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) = \dfrac{1}{2}(\mathbf{V}(X+Y) + \mathbf{V}(X-Y))$.

▶ $\text{Cov}(X,Y) = \dfrac{1}{4}(\mathbf{V}(X+Y) - \mathbf{V}(X-Y))$.

▶ $\text{Cov}(X,Y) = \dfrac{1}{2}(\mathbf{V}(X+Y) - \mathbf{V}(X) - \mathbf{V}(Y))$.

▶ $\text{Cov}(X,Y) = \dfrac{1}{2}(\mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) - \mathbf{V}(X-Y))$.

❒ Soit $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{L}_d^2$ *indépendantes*, alors $\mathbf{V}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(X_i)$.

Réciproque *fausse*.

$\diamondsuit$ Soit $X, Y \in \mathcal{L}^2 \mid \quad \not\leftrightarrow \quad \delta^1 : \rho(X,Y) = \dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y)}}$.

■

▶ Soit $X, Y \in \mathcal{L}^2 \mid \quad \not\leftrightarrow \quad \delta : |\rho(X,Y)| \leq 1$ soit $|\text{Cov}(X,Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$ **(Inégalité de Cauchy-Schwartz).**

▶ $(|\rho(X,Y)| = 1) \Leftrightarrow (Y = aX + b$ p.s.$)$.

$\diamondsuit$ **Matrice de covariance-variance** Soit pour tout $k$ de $[1,n]$, $X_k \in \mathcal{L}_d^2$, on appelle *matrice de covariance-variance du vecteur aléatoire* $V = (X_1, \ldots, X_n)$ la *matrice symétrique réelle* de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ notée $\Gamma_V$ définie par : $\Gamma_V = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{(i,j)\in[1,n]^2}$.

❒ $\forall (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) =^t (a_1, \ldots, a_n)\Gamma_V \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. La forme quadratique associée à $\Gamma_V$ qui montre que la matrice $\Gamma_V$ est positive.

## Indépendance

♢

- $X_1 \perp\!\!\!\perp \ldots \perp\!\!\!\perp X_n \in \mathcal{L}^1$, lorsque $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega)$,
$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left([X = x_i]\right).$$
- $X_1 \perp\!\!\!\perp \ldots \perp\!\!\!\perp X_n$ lorsque $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,
$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X \leq x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left([X \leq x_i]\right).$$

❒

- $(X \perp\!\!\!\perp Y) \Rightarrow (\forall (\varphi, \psi), \varphi(X) \perp\!\!\!\perp \psi(Y))$.
- $(X_1 \perp\!\!\!\perp \ldots \perp\!\!\!\perp X_n) \Rightarrow \left(\mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left(X_i\right)\right)$.
- $(X \perp\!\!\!\perp Y) \Rightarrow (\mathrm{Cov}(X, Y) = 0)$.
  Réciproque *fausse.*
- $(X \perp\!\!\!\perp Y) \Rightarrow (\rho(X, Y) = 0)$
  Réciproque *fausse.*
- $(X \perp\!\!\!\perp Y) \Longrightarrow \left(\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}(X \mid [Y = y_j]) = \mathbf{E}(X) \\ \mathbf{E}(Y \mid [X = x_i]) = \mathbf{E}(Y) \end{array} \right.\right)$.
- $\forall (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n,\ (X_1 \perp\!\!\!\perp \ldots \perp\!\!\!\perp X_n) \Rightarrow \left(\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathbf{V}(X_i)\right)$.

- **Lemme des coalitions**
  $(X_1 \perp\!\!\!\perp \ldots \perp\!\!\!\perp X_{n+m}) \Rightarrow (\forall (\varphi, \psi),\ \varphi(X_1, \ldots, X_n) \perp\!\!\!\perp \psi(X_{n+1}, \ldots, X_{n+m}))$ (on peut mélanger comme on veut les variables aléatoires).

**❒ Convolution**

- $(X \perp\!\!\!\perp Y) \Rightarrow \left(\mathbf{P}([X + Y = z]) = \sum_{x \mid \left\{ \begin{array}{l} x \in X(\Omega) \\ z - x \in Y(\Omega) \end{array} \right.} \mathbf{P}([X = x])\mathbf{P}([Y = z - x])\right)$
- $(X \perp\!\!\!\perp Y) \Rightarrow \left(f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x - t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x - t) f_Y(t) dt\right)$,
  $f_{X+Y}$ est $\mathcal{C}^0$ presque partout.


*70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris*
*01 43 48 83 36*
*contact@edukaty.com*

## Inégalités probabilistes

$\diamondsuit$ $\forall A \in \mathcal{A},\ \mathbf{1}_A = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \text{si} & A \\ 0 & \text{si} & \overline{A} \end{array} \right.$. Par définition *une variable indicatrice est donc une variable de Bernoulli.*

■ $\forall A \in \mathcal{A},\ \mathbf{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbf{P}(A),\ \mathbf{V}(\mathbf{1}_A) = \mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(A))$.

❒ **Inégalité de Markov (I.M.)**

► Soit $X \in \mathcal{L}^1$ à *valeurs positives*, alors $\forall \varepsilon > 0,\ \mathbf{P}([X \geq \varepsilon]) \leq \dfrac{\mathbf{E}(X)}{\varepsilon}$.

► Ce qui se généralise pour $\forall r > 0,\ X \in \mathcal{L}^r, \forall \varepsilon > 0,\ \mathbf{P}([|X| \geq \varepsilon]) \leq \dfrac{\mathbf{E}(|X|^r)}{\varepsilon^r}$

❒ **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (I.B.T.)** Soit $X \in \mathcal{L}^2$ *admettant variance non nulle*, alors $\forall \varepsilon > 0,\ \mathbf{P}([|X - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon]) \leq \dfrac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}$.

# Convergences

## Convergence en probabilité

♢ $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ lorsque $\forall\varepsilon>0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}([|X_n-X|\geq\varepsilon])=0$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}([|X_n-X|<\varepsilon])=1$.

■

▶ $((X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X) \Leftrightarrow ((X_n-X)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0)$.

▶ $((X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X) \not\Rightarrow \left(\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X_n)=\mathbf{E}(X) \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{V}(X_n-X)=0\right)$.

❒ $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X_n)=a\in\mathbb{R} \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{V}(X_n)=0\right) \Rightarrow \left((X_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathbf{P}} a\right)$.

■ (hors programme)

▶ $\left(|X_n|_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0\right) \Leftrightarrow \left((X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0\right)$.

▶ $\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X \text{ et } (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} Y\right) \Rightarrow (X=Y \text{ p.s.})$.

❒ **Slutsky** (hors programme) Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ et si $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ alors $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} f(X)$.

■

▶ Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} Y$ alors
$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ (aX_n+bY_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} aX+bY$.

▶ $(X_nY_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} XY$.

▶ $\left(\dfrac{X_n}{Y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} \dfrac{X}{Y}$ avec $\mathbf{P}([Y=0])=0$.

❒ **Loi faible des grands nombres**

▶ Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *deux à deux non corrélées, (i.e. les covariances deux à deux sont nulles) d'espérance commune $m$ et de variance commune $\sigma^2$*. Soit $\overline{X}_n=\dfrac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ alors $(\overline{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathbf{P}} m$.

▶ Si $\forall k\in[1,n],\ X_k\hookrightarrow\mathcal{B}(p)$ alors en posant $F_n=\dfrac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ on a :
$\forall\varepsilon>0,\ \mathbf{P}([|F_n-p\geq\varepsilon|])\leq\dfrac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}\leq\dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.

## Convergence en loi

♢ $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ en tout point où $F_X$ est $\mathcal{C}^0$ sur une partie de $\mathbb{R}$.

❒ Soit $a$ et $b$ deux réels tel que $a < b$ on a :
$\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}([a < X_n \leq b]) = \mathbf{P}([a < X \leq b])$.

❒ $\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X\right) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ X_n(\Omega) \subset X(\Omega)$ et $\forall k \in \mathbb{N}$,
$\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}([X_n = x_k]) = \mathbf{P}([X = x_k]))$.

❒ **Théorème de la limite centrée (TCL)**

▶ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **i.i.d.** alors $(S_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} N$ où $N \hookrightarrow N(0,1)$ où $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et

$$S_n^* = \frac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{\sigma(S_n)}.$$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}([S_n \leq x]) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$.

▶ Le TCL existe aussi en version moyenne.

❒ $\forall a \in \mathbb{R}$, $\left((X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} a\right) \Rightarrow \left((X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} a\right)$.

## Approximations

❒ **Hypergéométrique par binomiale** $\forall k \in \mathbb{N}$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{H}(N_k, n, p)$ où $n \in \mathbb{N}$ et $p \in ]0,1[$ fixés. Supposons que $\forall k \in \mathbb{N}$, $pN_k$ et $N_k(1-p) \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} N_k = +\infty$ alors $(X_k)_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ (condition : $N \geq 10n$).

❒ **Binomiale par Poisson** $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, $\lambda > 0$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ (conditions : $n \geq 30$, $p \leq 0,1$).

❒ **Binomiale par normale** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, ainsi $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Alors $(S_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} N$ où $N \hookrightarrow N(0,1)$ avec $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n^* = \dfrac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$
(conditions : $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $nq \geq 5$).

❒ **Poisson par normale** $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, $\lambda > 0$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ (condition : $\lambda \geq 15$).


www.edukaty.fr
*70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris*
*01 43 48 83 36*
*contact@edukaty.com*

# Estimations

## Estimation ponctuelle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $\theta$ un réel de $\Theta$ une partie de $\mathbb{R}$ et $g : \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$.
$\diamondsuit$ Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un $n$ échantillon d'une var $X$ **i.i.d.**, on appelle **statistique** ou **estimation de** $g(\theta)$, toute suite de variables $(T_n)_n$ où $\forall n,\ T_n = \varphi_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendante de $\theta$. C'est une variable aléatoire réelle.
$\diamondsuit$ On dit que $(T_n)_n$ est **un estimateur convergent** ou **consistant** de $g(\theta)$ lorsque
$(T_n)_n \xrightarrow{\mathbf{P}} g(\theta)$.
$\diamondsuit$ **Biais d'un estimateur par rapport à** $g(\theta)$ : $b_{T_n}(\theta) = \mathbf{E}_\theta(T_n - g(\theta))$.

- Si $b_{T_n}(\theta) = 0$, on dit que l'**estimateur est sans biais**.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{T_n}(\theta) = 0$, on dit que l'**estimateur est asymptotiquement sans biais**.

❐ Si $b_{T_n}(\theta) = 0$ soit si $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{T_n}(\theta) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{V}_\theta T_n = 0$ alors $(T_n)$ est convergent soit $(T_n)_n \xrightarrow{\mathbf{P}} g(\theta)$.
$\diamondsuit$ On appelle **risque quadratique moyen** de $T_n$ : $r_{T_n}(\theta) = \mathbf{E}_\theta\left((T_n - g(\theta))^2\right)$.
❐ $r_{T_n}(\theta) = \mathbf{V}_\theta(T_n) + b_{T_n}^2(\theta)^2$.
❐ $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} r_{T_n}(\theta) = 0\right) \Rightarrow \left((T_n)_n \xrightarrow{\mathbf{P}} g(\theta)\right)$.

## Estimateurs de paramètres usuels sans biais et convergents

### Moyenne empirique

Soit $n$ un entier naturel non nul, $\mu$ un réel inconnu que l'on cherche à estimer et $\sigma$ strictement positif.
$\diamondsuit$ $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ où le $n$-échantillon est tel que $\forall k \in [1, n],\ \mathbf{E}(X_k) = \mu$ inconnue.
❐ $\mathbf{E}(\overline{X_n}) = \mu$ et $\mathbf{V}(\overline{X_n}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$ où $\mu$ est un réel et
❐

- $(\forall k \in [1, n],\ X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)) \Rightarrow \left(\overline{X_n} \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})\right)$ où $\mu$ est un réel et $\sigma$ strictement positif.
- $(\forall k \in [1, n],\ X_k \not\hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)) \Rightarrow \left(\overline{X_n} \underset{\approx}{\hookrightarrow} \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)\right)$ par le TCL pour $n$ grand, où $\mu$ est un réel et $\sigma$ strictement positif.

❐ $(\overline{X_n}) \xrightarrow{\mathbf{P}} \mu$.

### Fréquence empirique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p$ et $q$ deux réels de $]0, 1[$ inconnus donc à estimer, tel que $p + q = 1$.
$\diamondsuit$ $F_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ où le $n$-échantillon est tel que $\forall k \in [1, n],\ X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ où $p$ est inconnu.
❐ $\mathbf{E}(F_n) = p$ et $\mathbf{V}(F_n) = \dfrac{pq}{n}$.
❐ $\overline{X_n} \underset{\approx}{\hookrightarrow} \mathcal{N}\left(p, \dfrac{pq}{n}\right)$ pat le **TCL** pour $n$ grand, $np \geq 5$ et $nq \geq 5$.
❐ $(F_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} p$


*70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris*
*01 43 48 83 36*
*contact@edukaty.com*

## Variance empirique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $\theta$ un réel de $\Theta$ une partie de $\mathbb{R}$.

❒ $S_n^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X_n}\right)^2$ où le $n$-échantillon est tel que $\forall k,\ \mathbf{E}(X_k) = m$ *connue* et $\mathbf{V}(X_k) = \sigma^2$ *inconnue*.

❒ $S_n^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - (\overline{X_n})^2$.

❒ $\mathbf{E}(S_n^2) = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)\sigma^2$.

❒ $\left(\dfrac{n}{n-1}S_n^2\right) \xrightarrow{\mathbf{P}} \sigma^2$.

## Estimation par intervalle de confiance de $g(\theta)$ au risque $\alpha$ ($\mathrm{IC}_\alpha(\theta)$)

◇ L'intervalle aléatoire $[U_n, V_n]$ est un **intervalle de confiance de** $g(\theta)$ **au niveau** $1-\alpha$ si $\mathbf{P}([U_n, V_n] \ni g(\theta)) \geq 1-\alpha$ autrement dit si $\mathbf{P}([U_n \leq g(\theta) \leq V_n]) \geq 1-\alpha$ ($\alpha$ est appelé le **risque**).

❒ $IC_\alpha(p) = \left[F_n - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\dfrac{F_n(1-F_n)}{n}}\ ;\ F_n + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\dfrac{F_n(1-F_n)}{n}}\right]$ et

$IC_\alpha(p) \subset \left[F_n - \dfrac{u_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}}\ ;\ F_n + \dfrac{u_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}}\right]$

(condition $\min(nu_n,\ nv_n,\ n(1-u_n), n(1-v_n)) \geq 5$).

❒ $IC_\alpha(\mu) = \left[\overline{X_n} - u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{X_n} + u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ (condition $n \geq 30$).

Si $\sigma$ est *inconnu*, l'estimer par la réalisation de $\sqrt{\dfrac{n}{n-1}}S_n$ noté $s$ ce qui donne :

$IC_\alpha(\mu) = \left[\overline{X_n} - u_{1-\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{X_n} + u_{1-\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right]$.


70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris
01 43 48 83 36
contact@edukaty.com

# Lois

## Loi de Bernoulli

- **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
- **Paramètre :** $p \in ]0,1[$.
- **Épreuve type :** épreuve amenant deux issues seulement : succès ou échec.
- $X(\Omega) = \{0,1\}$.
- $\mathbf{P}([X=0]) = 1-p$; $\mathbf{P}([X=1]) = p$.
- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1-p & \text{si} \quad x \in [0,1[ \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$.
- $\mathbf{E}(X) = p$.
- $\mathbf{V}(X) = p(1-p)$.
- $(X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)) \Longleftrightarrow (1-X \hookrightarrow \mathcal{B}(1-p))$.
- $(X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)) \Longleftrightarrow (X \hookrightarrow \mathcal{B}(p))$.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **i.i.d.** $\mid$ $(\forall k \in [1,n], X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)) \Longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)\right)$.

## Loi binomiale

- **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
- **Paramètres :** $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in ]0,1[$.
- **Épreuve type :** succession de $n$ épreuves de **Bernoulli**[1] **indépendantes** et de **même paramètre** $p$.
- $X(\Omega) = \{0,1,\ldots,n\}$.
- $\forall k \in \{0,1,\ldots,n\}$, $\mathbf{P}([X=k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
- $\mathbf{E}(X) = np$.
- $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$.
- $(X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)) \Longleftrightarrow (n-X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,1-p))$.
- $(X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)) \Longleftrightarrow (X \hookrightarrow \mathcal{B}(p))$.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **i.i.d.** $\mid$ $(\forall k \in [1,n], X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)) \Longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)\right)$.
- $\mathcal{B}(n_1,p) * \cdots * \mathcal{B}(n_l,p) \hookrightarrow \mathcal{B}(\sum_{k=1}^{l} n_k, p)$ (**stabilité** de la loi binomiale pour la **somme** de variables **indépendantes**).

1. Une épreuve de Bernoulli est une épreuve à deux issues seulement


70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris
01 43 48 83 36
contact@edukaty.com

## Loi de Dirac

- **Notation :** $X \hookrightarrow \delta_c$.
- **Paramètre :** $c \in \mathbb{R}$.
- **Épreuve type :** numéro associée à une boule tirée d'une urne ne contenant que des boules ayant le même numéro $c$.
- $X(\Omega) = \{c\}$.
- $\mathbf{P}([X = c]) = 1$.
- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < c \\ 1 & \text{si} \quad x \geq c \end{cases}$.
- $\mathbf{E}(X) = c$.
- $\mathbf{V}(X) = 0$.
- $(\mathbf{V}(X) = 0) \Leftrightarrow (X \hookrightarrow \delta_c)$.
- $(\mathbf{E}(X^2) = 0) \Leftrightarrow (X \hookrightarrow \delta_0)$.

## Loi exponentielle

- **Notation :** $X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$.
- **Paramètre :** $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
- **Épreuve type :** temps d'attente entre deux phénomènes indépendants tels que des arrivées à un guichet, ou des appels téléphoniques.
- $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$.
- $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$.
- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$.
- $\mathbf{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.
- $\mathbf{V}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.
- $(X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)) \Leftrightarrow (\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ \mathbf{P}_{[X>x]}([X > x+y]) = \mathbf{P}([X > y]))$ **(absence de mémoire)** ce qui s'est passé sur l'intervalle $]-\infty, x]$ n'affecte en rien ce qui se passera sur l'intervalle $]x, x+y]$.
- $\varepsilon(\lambda) = \Gamma\left(\dfrac{1}{\lambda}, 1\right)$.
- $\underbrace{\varepsilon(\lambda) * \cdots * \varepsilon(\lambda)}_{n \text{ fois}} = \Gamma\left(\dfrac{1}{\lambda}, n\right)$.
- Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda x)$ et $X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$ alors $\mathbf{P}([X > x]) = \mathbf{P}([Y = 0])$.
- Soit $X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$ alors $\lfloor X \rfloor \hookrightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$ (hors programme).

## Loi grand gamma

- **Notation :** $X \hookrightarrow \Gamma(b,t)$.
- **Paramètres :** $b \in \mathbb{R}_+^*,\ t \in \mathbb{R}_+^*$.
- $X(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$.
- $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{e^{-\frac{x}{b}} x^{t-1}}{\Gamma(t) b^t} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.
- $\mathbf{E}(X) = bt$.
- $\mathbf{V}(X) = b^2 t$.
- $\forall (t_1, t_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \displaystyle\int_0^1 v^{t_1-1}(1-v)^{t_2-1} du = \frac{\Gamma(t_1)\Gamma(t_2)}{\Gamma(t_1+t_2)}$.
- $\Gamma(1,t) = \gamma(t)$.
- $\Gamma\left(\dfrac{1}{\lambda}, 1\right) = \varepsilon(\lambda)$.
- $(X \hookrightarrow \gamma(t)) \iff (bX \hookrightarrow \Gamma(b,t))$.
- $(X \hookrightarrow \Gamma(b,t)) \iff (\dfrac{X}{b} \hookrightarrow \gamma(t))$.
- $(X \hookrightarrow \Gamma(b,t)) \iff (b'X \hookrightarrow \Gamma(bb',t)$ ou $b' \in \mathbb{R}_+^*)$.
- $\Gamma(b,t_1) * \cdots * \Gamma(b,t_n) = \Gamma\left(b, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} t_k\right)$.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **i.i.d.** $\mid (\forall k \in [1,n],\ X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)) \Longrightarrow \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \hookrightarrow \Gamma\left(2, \frac{n}{2}\right)\right)$ (loi du chi-deux à $n$ degré de liberté, hors programme).
- $(X \hookrightarrow \Gamma(b,n)$ et $n \geq 30) \Longrightarrow \left(X \underset{\approx}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(bn, b^2 n)\right)$ (hors programme).

## Loi petit gamma

- **Notation :** $X \hookrightarrow \gamma(t)$.
- **Paramètre :** $t \in \mathbb{R}_+^*$.
- $X(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$.
- $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{e^{-x} x^{t-1}}{\Gamma(t)} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.
- $\mathbf{E}(X) = t$.
- $\mathbf{V}(X) = t$.
- $\gamma(t) = \Gamma(1,t)$.
- $\underbrace{\gamma(t_1) * \cdots * \gamma(t_n)}_{n \text{ fois}} = \gamma\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t_k\right)$.

## Loi géométrique

- **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
- **Paramètre :** $p \in ]0,1[$.
- **Épreuve de type :** c'est le rang d'apparition du premier succès lors d'une **succession illimitée** d'épreuves de Bernoulli.
- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
- $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}([X = k]) = q^{k-1}p$ avec $q = 1 - p$.
- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 - q^k & \text{si} \quad x \in [k, k+1[, \quad k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ avec $q = 1 - p$ .
- $\mathbf{E}(X) = \dfrac{1}{p}$.
- $\mathbf{V}(X) = \dfrac{q}{p^2}$ avec $q = 1 - p$.
- $(X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)) \Leftrightarrow (\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbf{P}_{[X>n]}([X > m + n]) = \mathbf{P}([X > m]))$ **(absence de mémoire)** ce qui s'est passé sur l'intervalle $]-\infty, n]$ n'affecte en rien ce qui se passera sur l'intervalle $]n, n+m]$.
- $\underbrace{\mathcal{G}(p) * \cdots * \mathcal{G}(p)}_{n \text{ fois}} = \mathcal{P}(r,p))$ (loi de Pascal) (Hors programme).

## Loi hypergéométrique

- **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$.
- **Paramètres :** $N \in \mathbb{N}^*,\ n \in [0, N],\ p \in ]0,1[ \ \mid (Np, N(1-p)) \in \mathbb{N}^2$.
- **Épreuve de type :** c'est le nombre de boules blanches obtenues à partir d'une succession de $n$ tirages effectués sans remise à partir d'une urne bicolore.
- $X(\Omega) = [\max(0, n - Nq),\ \min(Np, n)]$.
- $\forall k \in [0, n],\ \mathbf{P}([X = k]) = \dfrac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.
- $\mathbf{E}(X) = np$.
- $\mathbf{V}(X) = np(1-p)\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)$ (savoir retrouver).
- **Approximation :** $(X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$ et $N \geq 10n) \Rightarrow (X \underset{\approx}{\hookrightarrow} \mathcal{B}(n,p))$ .

## Loi normale centrée et réduite ou de Laplace-Gauss

- **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.
- **Paramètres :** 0 et 1.
- $X(\Omega) = \mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$.
- **Intégrale de Gauss.**
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1$.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ (intégrale tabulée).
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ (ie $\Phi - \dfrac{1}{2}$ est impaire).
- $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$.
- **Mode :** 0.
- **Médiane :** 0.
- $\mathbf{E}(X) = 0$.
- $\mathbf{V}(X) = 1$.
- $\mathbf{E}(X^n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \in 2\mathbb{N}+1 \\ \dfrac{(2m)!}{2^m m!} & \text{si} \quad n = 2m \in 2\mathbb{N} \end{cases}$ (à retrouver !) .
- $\left(\dfrac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)\right) \Leftrightarrow \left(X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)\right)$.
- **Stabilité de la loi normale** pour la **somme** de variables **indépendantes**.

♦ $\underbrace{\mathcal{N}(0,1) * \cdots * \mathcal{N}(0,1)}_{n \text{ fois}} = \mathcal{N}(0,n)$.

♦ $\underbrace{\mathcal{N}(m,\sigma^2) * \cdots * \mathcal{N}(m,\sigma^2)}_{n \text{ fois}} = \mathcal{N}(nm, n\sigma^2)$.

♦ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **i.i.d.** $\mid (\forall k \in [1,n],\ X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)) \Rightarrow \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \hookrightarrow \Gamma\left(2, \frac{n}{2}\right)\right)$ (hors programme).

- **Approximations :**

$$\left(\begin{cases} X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p) \\ n \geq 30 \quad np \geq 5 \quad n(1-p) \geq 5 \end{cases}\right) \Rightarrow \left(X \underset{\approx}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(np, np(1-p))\right).$$

$$\left(\begin{cases} X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \\ \lambda \geq 15 \end{cases}\right) \Rightarrow \left(X \underset{\approx}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(\lambda, \lambda)\right).$$




70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris
01 43 48 83 36
contact@edukaty.com

## Loi normale quelconque ou de Laplace-Gauss

- **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$
- **Paramètres :** $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$
- $X(\Omega) = \mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$
- **Mode :** $m$
- **Médiane :** $m$
- $\mathbf{E}(X) = m$
- $\mathbf{V}(X) = \sigma^2$
- $\left(X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)\right) \Longleftrightarrow \left(\dfrac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)\right)$ (théorème fondamental de la loi normale)
- $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2) * \cdots * \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2) = \mathcal{N}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k, \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2\right)$ (**stabilité** de la loi normale pour la **somme** de variables **indépendantes**)
- **Approximations :**

♦ $\left(\left\{\begin{array}{l} X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \\ n \geq 30 \quad np \geq 5 \quad n(1-p) \geq 5 \end{array}\right.\right) \Rightarrow \left(X \underset{\approx}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(np, np(1-p))\right)$

- $\left(\left\{\begin{array}{l} X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \\ \lambda \geq 15 \end{array}\right.\right) \Rightarrow \left(X \underset{\approx}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(\lambda, \lambda)\right)$

♦ $((X_n)_{n\geq 1}$ **i.i.d**$) \Rightarrow \left(\left(\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - \mathbf{E}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)}{\sigma\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)}\right)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} N \text{ où } N \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)\right)$ (**TCL**)

## Loi de poisson

- **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$
- **Paramètre :** $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$
- **Épreuve de type :** nombre d'applications d'un phénomène rare durant un intervalle de temps donné
- $X(\Omega) = \mathbf{N}$
- $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([X = k]) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$
- $\mathbf{E}(X) = \lambda$
- $\mathbf{V}(X) = \lambda$
- $\mathcal{P}(\lambda_1) * \cdots * \mathcal{P}(\lambda_n) = \mathcal{P}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right)$ (**stabilité** de la loi de Poisson pour la **somme** de variables **indépendantes**)
- $\mathbf{P}([X = 0]) = 1 - F_Y(1)$ où $Y \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$
- Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda x)$ et $Y \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$ alors $\mathbf{P}([X > x]) = \mathbf{P}([Y = 0])$
- **Approximations :**

♦ $\left(\left\{\begin{array}{l} X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \\ \lambda \geq 15 \end{array}\right.\right) \Rightarrow \left(X \underset{\approx}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(\lambda, \lambda)\right)$

♦ $(X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $n \geq 30,\ p < 0,1) \Rightarrow \left(X \underset{\approx}{\hookrightarrow} \mathcal{P}(np)\right)$


*70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris*
*01 43 48 83 36*
*contact@edukaty.com*

## Loi uniforme continue

- **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$
- **Paramètre :** $[a,b]$ où $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ a < b$
- $X(\Omega) = [a,b]$
- $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad x \in [a,b] \\ 0 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$
- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad x \in [a,b] \\ 1 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$
- $\mathbf{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$
- $\mathbf{V}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
- $(X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])) \Leftrightarrow ((b-a)X + a \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b]))$
- $(X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])) \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{\lambda} \ln X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)\right)$

## Loi uniforme discrète

- **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1,2,\ldots,n\}) \quad n \geq 1$
- **Paramètre :** $n$
- **Épreuve type :** numéro d'une boule tirée d'une urne constituée de boules numérotées de 1 à $n$.
- $X(\Omega) = \{1,2,\ldots,n\}$
- $\forall k \in \{1,2,\ldots,n\},\ \mathbf{P}([X=k]) = \dfrac{1}{n}$
- $\mathbf{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$
- $\mathbf{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$
- $(X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b]))$ avec $a \leq b$ alors $X - a + 1 \hookrightarrow \mathcal{U}([1, b-a+1])$ et $\mathbf{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $\mathbf{V}(X) = \dfrac{(b-a+1)^2-1}{12}$
- **Simulation d'une variable aléatoire qui suit une loi uniforme.**

```
Function Uniforme(n:integer):integer;
begin
Uniforme:=random(n)+1;
end;
```



www.edukaty.fr
*70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris*
*01 43 48 83 36*
*contact@edukaty.com*

Légendes et abréviations

- ▶ $\diamondsuit$ Définition.
- ▶ ❒ Théorème.
- ▶ ■ Propriété(s).
- ▶ □ Corollaire.
- ▶ $|E|$ : cardinal de $E$.
- ▶ i.i.d. : variables indépendantes et identiquement distribuées.
- ▶ SCE : système complet d'événements.
- ▶ v.a.r.d. : variable aléatoire discrète.
- ▶ v.a.r.a.d. : variable aléatoire à densité.
- ▶ $\sum_i u_i < +\infty$ : série simple convergente.
- ▶ $\sum_{i,j} u_{i,j} < +\infty$ : série double convergente.
- ▶ $A \perp\!\!\!\perp B$ : $A$ et $B$ indépendants.
- ▶ $X \perp\!\!\!\perp Y$ : $X$ et $Y$ indépendantes.
- ▶ $X_1 \perp\!\!\!\perp \ldots \perp\!\!\!\perp X_n$ : $X_1, \ldots, X_n$ mutuellement indépendantes.

- ▶ $\forall k \geq 1$, $\mathcal{L}^k$ (respectivement $\mathcal{L}_d^k$) espace vectoriel des variables (discrètes) admettant un moment d'ordre $k$.
- ▶ $P_X$ : loi de $X$.




*70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris*
*01 43 48 83 36*
*contact@edukaty.com*